Conceito frequencista de probabilidade

A probabilidade de um acontecimento *A*, ***P(A)***, é o valor para o qual tende a frequência relativa do acontecimento *A* quando se repete a experiência aleatória um elevado número de vezes.

Da relação entre a frequência relativa e a probabilidade surgem as **propriedades das probabilidades**. Seja Ω o espaço de resultados de uma determinada experiência aleatória e *A* e *B* dois acontecimentos associados a esta experiência.

Então:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Se $A = \Omega$, então $P(A) = 1$

Se $A = \{\ \}$, então $P(A) = 0$

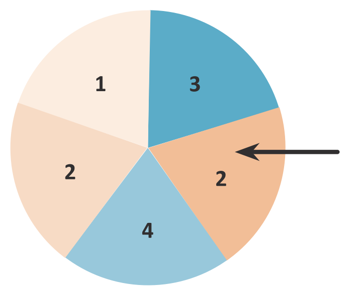
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Se $A \cap B = \{\ \}$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Se $A \cap B \neq \{\ \}$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

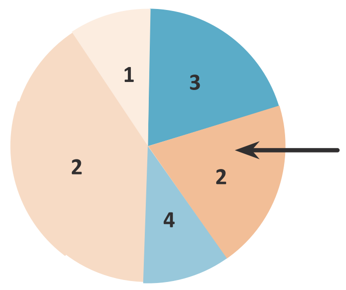
2.3.2 Definição clássica de probabilidade – Lei de Laplace

Considera a experiência aleatória que consiste em rodar as seguintes roletas e anotar o número que fica sob a seta.



Seja *A* o acontecimento: "sair número quatro".

Como existe um número "4" em cinco casos possíveis, podemos escrever que a probabilidade do acontecimento A ocorrer é igual a $\frac{1}{5}$, porque os acontecimentos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer (são equiprováveis).



Na situação representada na figura ao lado só conseguimos determinar a probabilidade do acontecimento *A* ocorrer se realizarmos a experiência um grande número de vezes porque os acontecimentos elementares não são equiprováveis (por exemplo o número um tem menos probabilidade de sair do que o número três).

Os exercícios propostos terão como pressuposto que os resultados elementares são igualmente possíveis. Nestes casos poderemos aplicar a definição clássica de probabilidade conhecida por **lei de Laplace**.

Lei de Laplace

Dado um espaço de resultados finito e tal que todos os resultados elementares são equiprováveis, então a probabilidade de um acontecimento *A* é o quociente entre o número de casos favoráveis a *A* e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n.^{o}\ de\ casos\ favoráveis\ A}{n.^{o}\ de\ casos\ possíveis}$$

Cardinal de um conjunto finito *A (#)*: é o número de elementos de *A*.

Exemplo resolvido – Lei de Laplace

Um indivíduo tem no bolso nove berlindes indistinguíveis ao tato: 3 azuis, 2 vermelhos e 4 pretos.

Extraindo um berlinde do bolso ao acaso, qual a probabilidade de o berlinde ser vermelho?

Espaço de resultados: $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, constituído por 9 elementos.

(**Nota:** por exemplo, A_1, A_2, e A_3 designam os três berlindes azuis existentes no bolso do indivíduo)

Acontecimento *A*: "sair berlinde vermelho".

$A = \{V_1, V_2\}$, conjunto constituído por 2 elementos.

Como cada berlinde tem a mesma probabilidade de surgir, podemos aplicar a lei de Laplace.

Existem dois casos favoráveis à extração de um berlinde vermelho em nove resultados possíveis.

Logo, $P(A) = \frac{2}{9}$

Exemplo resolvido – Diagrama de Venn e lei de Laplace

Ao analisar um inquérito feito a 50 alunos de uma escola verificou-se que 20 já tinham lido artigos sobre economia mundial *(EM)*, 12 alunos já tinham lido artigos sobre economia nacional *(EN)* e 24 não tinham lido qualquer artigo sobre economia.

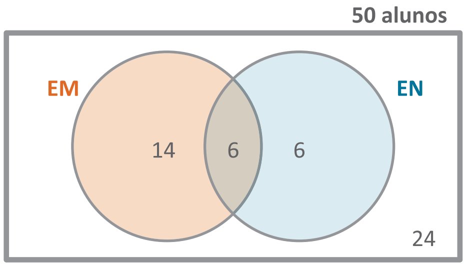
1. Organiza a informação num diagrama de Venn.

O inquérito foi realizado a 50 alunos.

Pela informação dada no enunciado temos 20 + 12 + 24 = 56, ou seja, existem 6 alunos (56 − 50 = 6) que leram **artigos sobre economia nacional** e **artigos sobre economia mundial**.

Assim temos 20 − 6 = 14 alunos que leram **apenas artigo, s sobre economia mundial** e 12 − 6 = 6 alunos que leram **apenas artigos sobre economia nacional**.

Desta forma já podemos organizar a informação num diagrama de Venn:



Nota:

A representação em diagrama de Venn apoia a organização da informação quando se está perante uma população classificada de forma cruzada segundo diversas categorias.

2. Ao escolher um destes alunos ao acaso, qual é a probabilidade de que:

2.1. tenha lido apenas artigos de economia mundial;

Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento diferença entre *EM* e *EN* (*EM* − *EN*), constituído por todos os elementos que pertencem a *EM* e não pertencem a *EN*.

$$P\,(EM - EN) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

2.2. tenha lido artigos de economia mundial **ou** de economia nacional;

Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento união de *EM* com *EN* ($EM \cup EN$), constituído por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos acontecimentos *EM* ou *EN*.

$$P\,(EM \cup EN) = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$$

2.3. tenha lido artigos de economia nacional **e** artigos de economia mundial;

Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento interseção de *EM* com *EN* ($EM \cap EN$), constituído por todos os elementos que pertencem simultaneamente a *EM* e *EN*.

$$P\,(EM \cap EN) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

2.4. tenha lido artigos de economia mundial.

$$P\,(EM) = \frac{20}{50} = \frac{10}{25}$$

Exemplo resolvido – Tabela de dupla entrada e diagrama em árvore

Na direção de uma empresa existem três funcionários do género feminino e dois funcionários do género masculino. Para a organização de um evento foram escolhidos ao acaso dois elementos da direção. Determina a probabilidade dos elementos escolhidos serem ambos do género feminino.

1.ª proposta de resolução: recurso a uma tabela

	F_1	F_2	F_3	M_1	M_2
F_1	F_1, F_1	F_1, F_2	F_1, F_3	F_1, M_1	F_1, M_2
F_2	F_2, F_1	F_2, F_2	F_2, F_3	F_2, M_1	F_2, M_2
F_3	F_3, F_1	F_3, F_2	F_3, F_3	F_3, M_1	F_3, M_2
M_1	M_1, F_1	M_1, F_2	M_1, F_3	M_1, M_1	M_1, M_2
M_2	M_2, F_1	M_2, F_2	M_2, F_3	M_2, M_1	M_2, M_2

Para definir o espaço de resultados associado à experiência aleatória, podemos utilizar uma tabela de dupla entrada, para facilitar a contagem.

Considerando que, no contexto deste exercício, ter na direção os elementos F_1 e F_2 é o mesmo que ter na direção os elementos F_2 e F_1, anulamos os resultados que não têm interesse, por exemplo, (F_2, F_1) porque já contabilizamos (F_1, F_2).

Espaço de resultados:

$\Omega = \{(F_1, F_2); (F_1, F_3); (F_1, M_1); (F_1, M_2); (F_2, F_3); (F_2, M_1); (F_2, M_2); (F_3, M_1); (F_3, M_2); (M_1, M_2)\}$

$\# \Omega = 10$

Acontecimento A: "ambos os funcionários são do género feminino".

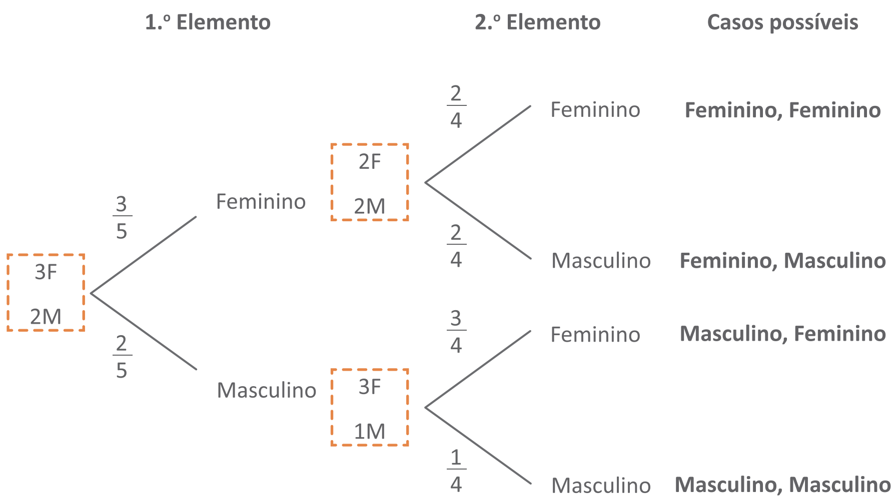
$A = \{(F_1, F_2); (F_1, F_3); (F_2, F_3)\}$

$\# A = 3$

Então, $P(A) = \frac{3}{10}$

2.ª proposta de resolução: recurso a um diagrama em árvore

Esta probabilidade também pode ser calculada com recurso a um diagrama em árvore.



Nesta situação podemos aplicar a **regra do produto**:

Se uma experiência aleatória se pode decompor em duas escolhas sucessivas, a primeira com *n* possibilidades e a segunda com *m* possibilidades, então existem $n \times m$ formas diferentes de a realizar.

Como para o 1.º elemento da equipa temos 5 hipóteses de escolha e para o 2.º elemento temos 4 hipóteses de escolha, então o número de casos possíveis é $5 \times 4 = 20$.

Em relação ao número de casos favoráveis à equipa ser formada por dois elementos do género feminino temos $3 \times 2 = 6$.

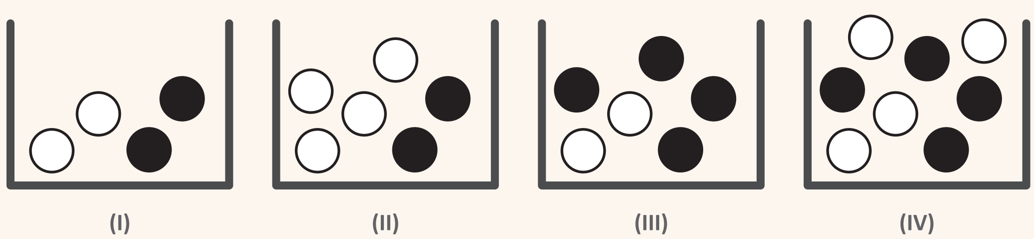
Então, $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ou $P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Nota:

Os diagramas em árvore apoiam a organização da informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias.

Tarefa 2

1. Na figura estão representadas quatro caixas com bolas pretas e brancas.



Diz se são verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes proposições:

1.1. É mais provável sair bola branca em I do que em II;

1.2. É mais provável sair bola branca em I do que em IV;

1.3. É mais provável sair bola branca em II do que IV;

1.4. É mais provável sair bola branca em II do que em III;

1.5. É mais provável sair bola branca em I do que em III.

2. Supõe que $P(A) = 0{,}2$; $P(\overline{B}) = 0{,}65$ e $P(A \cup B) = 0{,}4$. Determina:

2.1. $P(\overline{A})$; **2.2.** $P(B)$; **2.3.** $P(A \cap B)$; **2.4.** $P(A \cap \overline{A})$; **2.5.** $P(A \cup \overline{A})$

3. Uma caixa tem vinte bolas iguais, numeradas de 11 a 30. Extrai-se uma bola ao acaso e vê-se o número. Determina a probabilidade de esse número:

3.1. ser divisível por 2;

3.2. ser múltiplo de 7;

3.3. ser número primo;

3.4. ser superior ou igual a 24;

3.5. ser menor que 39;

3.6. ser maior que 30.

4. Um dado equilibrado tem as faces numeradas de 1 a 6. Lança-se o dado uma vez. Qual a probabilidade de sair um divisor de 30?

5. Lançam-se dois dados cúbicos não viciados, um deles com as faces numeradas de 1 a 6 e o outro com as faces numeradas de 4 a 9. Determina a probabilidade de a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima ser um múltiplo de 3.

(**sugestão:** constrói uma tabela de dupla entrada com as somas das faces que ficam voltadas para cima.)

6. Lança-se uma moeda equilibrada duas vezes. Determina a probabilidade de sair pelo menos uma face reverso.

7. Numa sondagem realizada a 400 indivíduos sobre o consumo de dois produtos, A e B, obteve-se a seguinte informação: 140 indivíduos consomem o produto A; 240 indivíduos consomem o produto B e 100 indivíduos não consomem nenhum destes dois produtos.

7.1. Determina o número de pessoas que consomem os dois produtos;

7.2. Escolhido um desses indivíduos ao acaso, qual a probabilidade desse indivíduo:

7.2.1. consumir apenas o produto A;

7.2.2. não consumir o produto A nem o produto B;

7.2.3. não consumir o produto B;

7.2.4. consumir o produto A ou o produto B.

(**sugestão:** constrói um diagrama de Venn.)

8. Um indivíduo tem 18 rifas para vender, das quais 8 têm prémio. Tirando ao acaso três dessas rifas, determina a probabilidade de :

8.1. saírem duas rifas premiadas;